

Filtre adapté stochastique sous contrainte

Bernard XERRI, Bruno BORLOZ

Groupe d'Etudes des Signaux et SYstème MS-GESSY/ISITV
Avenue Georges POMPIDOU BP 56, 83162 La Valette du Var (FRANCE)
xerri@isitiv.univ-tln.fr, borloz@univ-tln.fr

Résumé — Cette étude se positionne dans l'hypothèse d'une superposition additive de deux processus stochastiques dont l'un d'intérêt noté $S(t)$ est appelé signal et le second noté $b(t)$ est le terme perturbateur ou bruit. On associe classiquement à ce mélange le rapport signal à bruit noté ici $RSB = E[S^2(t)]/E[b^2(t)]$ défini comme le rapport des puissances. Dans les problèmes de détection on est amené à trouver un filtre linéaire qui maximise le nouveau RSB après filtrage; néanmoins la filtrée du signal ainsi obtenue peut s'écarter fortement de $S(t)$. Dans les problèmes de filtrage, de compression, de reconstruction etc... cet inconvénient peut devenir majeur. On est alors amené à maximiser le RSB sous contrainte.

Abstract — This work deals with two additive stochastic signals: the first one $S(t)$ is called signal of interest, the second one is the noise $b(t)$. Classically the signal to noise ratio is defined by $SNR = E[S^2(t)]/E[b^2(t)]$. In the detection problems we search a linear filter which maximizes the new SNR after filtering, but this resulting signal can be very different from the original signal $S(t)$. In filtering, compression, reconstruction ... this disadvantage may become serious. We will naturally try to achieve the constrained maximization of the SNR.

1 Introduction

Dans le cas de signaux à temps discret la puissance s'exprime à partir de la matrice de covariance A_0 pour le signal et B_0 pour le bruit. La maximisation du RSB après filtrage conduit alors au rapport de Rayleigh généralisé et par suite à la décomposition du signal et du bruit sur la base propre de $B_0^{-1}A_0$. Le filtre optimal projette le signal à temps discret $S(m)$ dans le sous-espace de dimension 1 (sauf cas particulier de valeur propre multiple) associé à la valeur propre maximale de $B_0^{-1}A_0$ [1][3]. Cette valeur est alors le nouveau RSB après filtrage. Ce problème se résume à la maximisation du RSB sous contrainte de projection de $S(m)$ dans un sous-espace de dimension 1.

Cette filtrée peut s'avérer non satisfaisante en terme de reconstruction du signal $S(m)$. Ce problème apparaît comme prédominant en terme de filtrage ou de compression en présence de bruit additif. Il est alors intéressant de recomposer le signal et le bruit dans un sous-espace de dimension p . La recombinaison dans un sous-espace de dimension p engendré par p vecteurs propres de $B_0^{-1}A_0$ possède des propriétés intéressantes en termes de détection et séparation [2][4]. Une question se pose cependant. Cette base est-elle adaptée en terme de reconstruction ou de compression ? Le problème est alors formulé en ces nouveaux termes : trouver le sous-espace de dimension p qui optimise le RSB après filtrage.

2 Filtre adapté stochastique sous contrainte

2.1 Préliminaire

Nous traitons ici le cas de signaux aléatoires numériques définis sur n échantillons.

Le résultat d'un filtrage linéaire est caractérisé par la projection d'une réalisation sur un vecteur V_i de dimension n . A la suite de p projections sur une variété linéaire $\{V_i\}$ normée, on crée $S_p(m)$ $m \in [1, n]$, processus aléatoire, tel que

$$S_p(m) = \sum_{i=1}^p \alpha_i V_i(m).$$

La puissance associée au processus ainsi défini est

$$P = E[S_p^T S_p] = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p E[\alpha_i \alpha_j] V_i^T V_j$$

que l'on peut simplifier et réduire à une sommation unique sur i (les vecteurs V_i étant de même norme ici fixée à l'unité) dans les deux cas suivants :

- soit la base constituée par $\{V_i\}$ est orthonormée,
- soit les variables aléatoires α_i et α_j sont décorréliées.

On a alors :

$$E[S_p^T S_p] = \sum_{i=1}^p E[\alpha_i^2] V_i^T V_i = \sum_{i=1}^p E[\alpha_i^2].$$

Nous exprimons les p composantes α_i comme le produit d'une matrice I_p de dimension $p \times n$, caractérisant une restriction, par le vecteur α de dimension n , soit $I_p \alpha$:

$$\sum_{i=1}^p E[\alpha_i^2] = \text{trace}(I_p E[\alpha \alpha^T] I_p^T) = \text{trace}(I_p V^{-1} A_0 (V^{-1})^T I_p^T)$$

car $\alpha = V^{-1}S$ et $A_0 = E[SS^T]$.

Le RSB étant le rapport de la puissance du signal sur celle du bruit c'est à dire un rapport de norme et sachant que la norme est un invariant en fonction de la base, nous décidons de travailler avec une base orthonormée. Nous avons alors $\alpha_i = V_i^T S$.

Les puissances des variables aléatoires α_i peuvent s'exprimer à partir de la matrice de covariance du processus S filtré, $E[\alpha_i^2] = V_i^T A_0 V_i$ d'où l'expression de P :

$$P = \sum_{i=1}^p V_i^T A_0 V_i.$$

2.2 Position du problème

Intéressons-nous maintenant à la superposition de deux processus aléatoires décorrélés dont l'un est d'intérêt $S(m)$ et l'autre perturbateur $b(m)$: $Z(m) = S(m) + b(m)$. Après projection de $Z(m)$ sur une variété linéaire orthonormée $\{X_i\}$, le rapport signal à bruit ρ_f peut s'écrire à partir des matrices de covariance A_0 du signal et B_0 du bruit :

$$\rho_f = \frac{\sum_{i=1}^p X_i^T A_0 X_i}{\sum_{i=1}^p X_i^T B_0 X_i}.$$

Nous chercherons donc à optimiser ce rapport, c'est-à-dire trouver le sous-espace qui maximise ρ_f pour une valeur de p fixée.

2.3 Gain

Ce rapport ρ_f peut être exprimé en fonction du rapport signal à bruit initial noté ρ_{ini} . Ainsi on a

$$\rho_f = \rho_{ini} \frac{\sum_{i=1}^p X_i^T A X_i}{\sum_{i=1}^p X_i^T B X_i},$$

avec $\rho_{ini} = \frac{\text{trace}(A_0)}{\text{trace}(B_0)}$, $A = \frac{A_0}{\text{trace}(A_0)}$, $B = \frac{B_0}{\text{trace}(B_0)}$.

A et B sont donc des matrices de trace égale à un.

Le gain ρ obtenu après filtrage linéaire est donc :

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^p X_i^T A X_i}{\sum_{i=1}^p X_i^T B X_i}. \quad (1)$$

La suite de l'étude se focalise sur cette expression, en déterminant le sous-espace qui maximise ce gain.

3 Sous-espace optimal

L'expression de ρ donnée par (1) est établie sous l'hypothèse de normalisation des X_i . Cette contrainte ne perd pas en généralité car l'expression de ρ reste inchangée sous réserve de fixer la même norme à l'ensemble des X_i . Afin d'optimiser ρ sous cette contrainte, nous créons la grandeur $L(X_i, \gamma_i)$:

$$L(X_i, \gamma_i) = \rho + \sum_{i=1}^p \gamma_i (X_i^T X_i - 1).$$

Ajoutons la contrainte de base orthogonale, alors

$$L(X_i, \gamma_i, \gamma_{ij}) = \rho + \sum_{i=1}^p \gamma_i (X_i^T X_i - 1) + \sum_{i=1}^p \sum_{j \neq i}^p \gamma_{ij} (X_i^T X_j),$$

qui peut être écrit sous forme matricielle avec γ matrice symétrique appartenant à M_p et $X = [X_1 X_2 X_3 \dots X_p]$.

$$L(X, \gamma) = \rho + \text{trace}(\gamma(X^T X - I)).$$

En exprimant de même ρ à partir des matrices X , A et B , il vient :

$$L(X, \gamma) = \frac{\text{trace}(X^T A X)}{\text{trace}(X^T B X)} + \text{trace}(\gamma(X^T X - I)). \quad (2)$$

Le problème consiste en la détermination de X qui maximise $L(X, \gamma)$ sachant que la dérivée partielle de $L(X, \gamma)$ par rapport à γ caractérise les contraintes.

L'optimisation est réalisée lorsque $\frac{\partial L}{\partial X} = 0$, soit

$$(A X - \rho B X) / \text{trace}(X^T B X) + X \gamma = 0.$$

L'expression devient, en posant $\gamma_1 = -\text{trace}(X^T B X) \gamma$ sachant que $\text{trace}(X^T B X) \neq 0$ car B est définie positive :

$$(A - \rho B) X = X \gamma_1. \quad (3)$$

Ainsi le sous-espace optimal de dimension p recherché, c'est-à-dire qui maximise $L(X, \gamma)$, est engendré par p vecteurs parmi les n vérifiant l'équation (3).

Mais γ_1 est symétrique donc il existe une matrice μ diagonale tel que $\gamma_1 = U^T \mu U$ avec $U^T U = I$.

L'équation s'écrit alors $(A - \rho B) X U^T = X U^T \mu$.

$X U^T$ représente la matrice des vecteurs propres de $(A - \rho B)$ notée $M(\rho)$. X est donc déterminé à une matrice unitaire U près. $M(\rho)$ étant symétrique, la matrice des vecteurs propres est unitaire ce qui caractérise une base orthonormée.

La suite de cet article a pour but d'estimer X définissant le sous-espace optimal de dimension p vérifiant

$$(A - \rho B) X = X \mu. \quad (4)$$

3.1 Propriétés

On sait que $\text{trace}(A - \rho B) = 1 - \rho$, de plus (4) équivaut à $\forall i=1, \dots, n \quad (A - \rho B) X_i = \mu_i X_i$ avec μ_i $i^{\text{ème}}$ élément de la matrice diagonale μ .

Si on range les X_i de telle façon que les p premiers soient les "bons", alors

$$\sum_{i=1}^p X_i^T (A - \rho B) X_i = \sum_{i=1}^p \mu_i X_i^T X_i = \sum_{i=1}^p \mu_i,$$

$$\frac{\sum_{i=1}^p X_i^T A X_i}{\sum_{i=1}^p X_i^T B X_i} - \rho = \frac{\sum_{i=1}^p \mu_i}{\sum_{i=1}^p X_i^T B X_i}.$$

Pour le sous-espace optimal, la somme des valeurs propres de $M(\rho)$ associée à ce sous-espace est nulle :

$$\sum_{i=1}^p \mu_i = 0, \text{ soit } \sum_{i=1+p}^n \mu_i = \text{trace}(A) - \rho \text{ trace}(B) = 1 - \rho.$$

Nous remarquons qu'il n'y a pas d'équivalence entre ces deux propositions ; en effet il peut exister des valeurs de ρ que nous notons ρ_s telles qu'il existe un sous-espace dont la somme des valeurs propres associées soit nulle mais ce sous-espace ne fournit pas le rapport défini par l'équation (1) maximal, c'est-à-dire qu'il existe un arrangement de p

parmi n noté I_1 tel que $\sum_{i \in I_1} \mu_i(\rho_s) = 0$, mais pour le même ρ_s il existe un arrangement différent noté $I_j \neq I_1$ tel que

$$\frac{\sum_{i \in I_j} X_i^T A X_i}{\sum_{i \in I_j} X_i^T B X_i}(\rho_s) > \frac{\sum_{i \in I_1} X_i^T A X_i}{\sum_{i \in I_1} X_i^T B X_i}(\rho_s).$$

conclusion

Le sous-espace optimal est donc décrit par les p vecteurs propres de $M(\rho)$ associés aux p valeurs propres telles que :
- la somme de ces p valeurs propres soit nulle,
- le sous-espace engendré par ces p vecteurs fournit le plus grand rapport signal à bruit.

3.2 Propriétés des valeurs propres

La matrice $M(\rho)$ est paramétrée par ρ ; il en est de même pour ses vecteurs propres et valeurs propres.

L'évolution des valeurs propres est continue en ρ . Les vecteurs propres sont eux définis à une norme près et à une direction près. Mais compte tenu de la contrainte de normalisation, et en imposant le sens aux vecteurs propres on peut suivre ceux-ci par continuité.

Nous allons caractériser l'évolution de ces valeurs propres en fonction de ρ . L'équation (4) conduit à

$$\forall k > 0, (A - \rho B)^k X = X \mu^k \Rightarrow \text{trace}((A - \rho B)^k) = \sum_{i=1}^n \mu_i^k$$

donc $\sum_{i=1}^n \mu_i^k$ est de degré au plus k en ρ , d'où $\forall i$ μ_i est de degré au plus un en ρ .

L'évolution des valeurs propres en fonction de ρ comporte une partie non linéaire caractérisée par une puissance de ρ inférieure à un. On peut écrire dans le cas particulier de dimension 2 ($n=2$) l'expression analytique des valeurs propres μ :

$$\mu = 1/2 (\text{trace}(A) - \rho \text{trace}(B)) \pm \sqrt{c_2 \rho^2 + c_1 \rho + c_0}.$$

On observe une partie non linéaire décrite par l'expression intégrant la racine carrée.

3.3 Relations sur les vecteurs propres et valeurs propres

La base des vecteurs propres de $M(\rho)$ est orthonormée car $M(\rho)$ est symétrique. Nous avons par conséquent

$$\forall i, j \quad X_i^T \frac{\partial X_j}{\partial \rho} + X_j^T \frac{\partial X_i}{\partial \rho} = 0. \quad (5)$$

La dérivation en fonction de ρ de (4) conduit à

$$-X^T B X + \mu X^T \frac{\partial X}{\partial \rho} = \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + X^T \frac{\partial X}{\partial \rho} \mu.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \text{pour } i=j \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial \rho} &= -X_i^T B X_i \\ \text{pour } i \neq j \quad (\mu_i - \mu_j) \frac{\partial X_i^T}{\partial \rho} X_j &= X_i^T B X_j \end{aligned} \quad (6)$$

L'équation (6) impose que la dérivée de μ_i par rapport à ρ est nécessairement négative. Les fonctions $\mu_i(\rho)$ sont toujours décroissantes en fonction de ρ et on a

$$\forall \rho \quad \text{trace} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) = -\text{trace}(B) = -1.$$

On peut de même calculer la dérivée seconde de μ_i :
 $\frac{\partial^2 \mu_i}{\partial \rho^2} = -2X_i^T B \frac{\partial X_i}{\partial \rho}$, soit $\text{trace} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} \right) = 0$.

3.4 Quelques cas particuliers

Etude pour $p=1$

On décide de reconstruire dans un sous-espace de dimension 1 (cas de la détection). La valeur propre associée à ce sous-espace est donc nulle et $M(\rho) X = 0$ soit encore $A X = \rho B X$. ρ est la plus grande des valeurs propres de $B^{-1}A$ et X le vecteur propre associé.

Etude pour $p=n-1$

On décide de déterminer un sous-espace de dimension n -

1. Puisque $\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^k = 0$ on peut exprimer μ_n en fonction de ρ , soit $\mu_n = \text{trace}(M(\rho)) - \text{trace}(A) - \rho \text{trace}(B) = 1 - \rho$, d'où

$$\begin{aligned} (A - \rho B) X_n &= (1 - \rho) X_n \\ \text{soit } (A - I) X_n &= \rho (B - I) X_n \end{aligned}$$

Cette expression précise que ρ est la plus grande valeur propre de $(B - I)^{-1}(A - I)$.

La base de reconstruction est constituée des vecteurs propres de $(A - \rho B)$ à laquelle on supprime X_n .

4 Présentation d'exemples

Exemple 1 : le bruit et le signal sont du premier ordre.

La corrélation décroît exponentiellement en fonction du temps

$$B = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.60 & 0.36 \\ 0.60 & 1.00 & 0.60 \\ 0.36 & 0.60 & 1.00 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.80 & 0.64 \\ 0.80 & 1.00 & 0.80 \\ 0.64 & 0.80 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Soient W matrice des vecteurs propres de $B^{-1}A$ et D matrice des valeurs propres de $B^{-1}A$.

$$W = \begin{bmatrix} 0.6611 & -0.7071 & 0.4170 \\ 0.3549 & 0.0000 & -0.8076 \\ 0.6611 & 0.7071 & 0.4170 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1.2303 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.5625 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.4572 \end{bmatrix}.$$

Le Rapport Signal à Bruit obtenu dans le sous-espace associé aux deux valeurs propres les plus élevées est égal à 1.06.

Le résultat de la maximisation du RSB sous contrainte de recombinaison dans un sous-espace de dimension 2 conduit à $\rho = 1.1186$.

La matrice des vecteurs propres $A - \rho B$ est

$$V = \begin{bmatrix} 0.3370 & -0.7071 & 0.6216 \\ -0.8791 & 0.0000 & 0.4766 \\ 0.3370 & 0.7071 & 0.6216 \end{bmatrix}.$$

Le sous-espace de dimension deux maximisant le RSB égal ici à ρ est engendré par

$$V_s = \begin{bmatrix} 0.3370 & 0.6216 \\ -0.8791 & 0.4766 \\ 0.3370 & 0.6216 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple, ce sous-espace est le même que le sous-espace engendré par les vecteurs propres numéro 1 et 3 de la base propre de $B^{-1}A$, mais il ne correspond pas à ses valeurs propres les plus grandes.

Exemple 2

$$A = \begin{bmatrix} 0.0379 & 0.0379 & 0.1514 \\ 0.0379 & 0.0473 & 0.2650 \\ 0.1514 & 0.2650 & 2.9148 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.2872 & 1.4658 & 0.1313 \\ 1.4658 & 1.6865 & 0.1629 \\ 0.1313 & 0.1629 & 0.0263 \end{bmatrix}.$$

Soient W matrice des vecteurs propres de $B^{-1}A$ et D matrice des valeurs propres de $B^{-1}A$.

$$W = \begin{bmatrix} 0.5219 & 0.7555 & -0.3972 \\ -0.5189 & -0.6549 & 0.9156 \\ 0.6770 & 0.0192 & -0.0622 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1051 & 0 & 0 \\ 0 & 0.448 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0124 \end{bmatrix}.$$

Le RSB obtenu dans le sous-espace associé aux deux valeurs propres les plus élevées est égale à 149.64. Le résultat de la maximisation du RSB sous contrainte de recombinaison dans un sous-espace de dimension 2 conduit à $\rho = 151.05$. La matrice des vecteurs propres $A-\rho B$ est

$$V = \begin{bmatrix} 0.7111 & -0.2531 & -0.6559 \\ -0.5845 & 0.3057 & -0.7516 \\ -0.3908 & -0.9179 & -0.0695 \end{bmatrix}.$$

Le sous-espace de dimension deux maximisant le RSB égal ici à ρ , est engendré par

$$V_s = \begin{bmatrix} 0.7111 & -0.2531 \\ -0.5845 & 0.3057 \\ -0.3908 & -0.9179 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple, aucun vecteur propre de $B^{-1}A$ n'appartient à ce sous-espace.

5 Présentation de l'algorithme

Il s'agit de déterminer le sous-espace de dimension p qui maximise le rapport ρ de l'équation (1). Les équations n'étant pas linéaires en ρ , nous présentons un algorithme permettant d'atteindre la valeur maximale de ρ .

Soit ρ_0 une valeur initiale de ce coefficient, alors on définit $M(\rho_0)$ matrice pour laquelle on évalue les valeurs propres $\mu_i(\rho_0)$ et les vecteurs propres associés X_i ,

$$(A - \rho_0 B)X_i = X_i \mu_i(\rho_0).$$

On choisit p vecteurs propres parmi les n tels que le nouveau rapport ρ_1 soit le plus grand parmi les $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ possibles. On note I_1 l'ensemble des p indices qui assurent le plus grand rapport ρ_1 soit,

$$\rho_1 = \frac{\sum_{i \in I_1} X_i^T A X_i}{\sum_{i \in I_1} X_i^T B X_i}(\rho_0).$$

On réinjecte ρ_1 en lieu et place de ρ_0 . Ainsi par itérations successives, la convergence s'effectue vers la valeur maximale de ce rapport que nous notons ρ_{\max} .

Si nous notons ρ_n le résultat de la n^{eme} itération alors l'incrément $\Delta\rho_n$ est décrit par

$$\Delta\rho_n = \rho_{n+1} - \rho_n = \frac{\sum_{i \in I_1} \mu_i(\rho_n)}{\sum_{i \in I_1} X_i^T B X_i(\rho_n)} = \frac{\sum_{i \in I_1} \mu_i(\rho_n)}{-\sum_{i \in I_1} \frac{\partial \mu_i}{\partial \rho}(\rho_n)}.$$

Dans l'algorithme proposé, on prend comme valeur initiale de ρ la plus grande valeur propre de $B^{-1}A$.

Par ailleurs les équations (4)(6) permettent de calculer les $\mu_i(\rho)$ et de les suivre par continuité.

Nous pouvons montrer que l'algorithme présenté conduit à une solution c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n$ existe et vaut ρ_{\max} .

6 Découplage des coefficients de décomposition

Nous venons de déterminer le sous-espace optimal E_p au sens du rapport signal à bruit. Nous recherchons dans cet espace une base $\{Z_i\}$ qui garantisse le découplage de l'ensemble des coefficients de décompositions.

La recherche de $\{Z_i\}$ conduit à la recherche de la matrice de passage notée W de la base $\{X_i\}$ à la base $\{Z_i\}$.

Si l'on pose $W=Y^{-T}$, A_p et B_p les nouvelles matrices de covariance du signal et du bruit dans E_p , la base $\{Z_i\}$ découple simultanément les coefficients associés au signal et au bruit, ceci conduit au système d'équations $Y^T A_p Y = D_S$ et $Y^T B_p Y = D_B$ où D_S et D_B sont des matrices diagonales.

La diagonalisation conjointe de A_p et B_p conduit à la recherche des vecteurs propres de $B_p^{-1}A_p$.

Références

- [1] JF. Cavassilas, B. Xerri. *Extension de la notion de filtre adapté. Contribution à la détection de signaux courts en présence de termes perturbateurs*. TS Volume 10 n°3, p 215-221.
- [2] J.F. Cavassilas, B. Xerri and G. Chabriel. *Séparation autodidacte de sources temporellement corrélées (mélange instantané)*. in GRETSI Symposium, Vol. 1, pp 107-110, Sept. 1997.
- [3] JF. Cavassilas, B. Xerri, B. Borloz. *Filtre adapté stochastique. Contribution à la détection de textures bidimensionnelles*. GRETSI 97 p 491-494
- [4] JF. Cavassilas, B. Xerri, B. Borloz. *An iterative algorithm using second order moments applied to blind separation of sources with same spectral densities*. SSAP august 2000 p349-353